I.D Isométries et coloriages du cube

Proposition 4

Le groupe des isométries positives du cube est

$$\mathrm{Iso}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$$

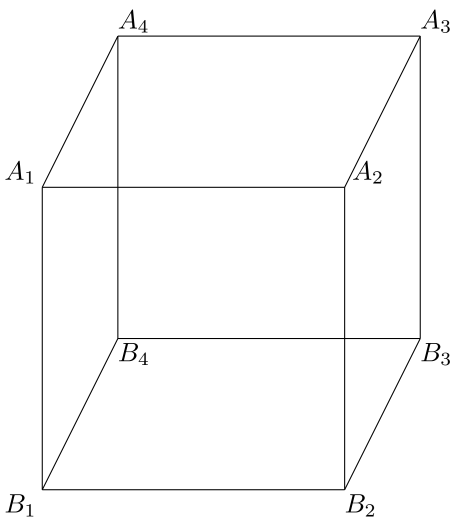
Démonstration. L'idée ici est d'exhiber une action de groupe sous la forme d'un morphisme de groupe, de montrer que cette action est fidèle et d'utiliser un système de générateurs particulier pour obtenir en plus la surjectivité.

1. Une isométrie préserve les longueurs donc transforme une grande diagonale (plus grande longueur dans le cube) en une grande diagonale. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des quatre grandes diagonales.

   On obtient ainsi l'action de $\mathrm{Iso}^+(C)$ sur l'ensemble $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ des grandes diagonales du cube (voir le dessin) définie par :

   $$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Iso}^+(C) &\longrightarrow \mathfrak{S}_4 \\ g &\longmapsto g_{1\ \mathrm{a}} \end{aligned}$$

   C'est un morphisme de groupes car les distances sont conservées. On note $D_1 = [A_1, B_1]$ le segment non orienté.

2. L'action φ que nous venons de définir est fidèle.
   Soit en effet $g \in \ker(\varphi)$ (i.e. $g_{|\mathcal{D}} = \mathrm{id}$), montrons que g est le neutre. Comme g fixe les grandes diagonales alors pour $i = 1, 2, 3, 4$, g permute A_i et B_{i+2} ou les laisse tous deux fixes.

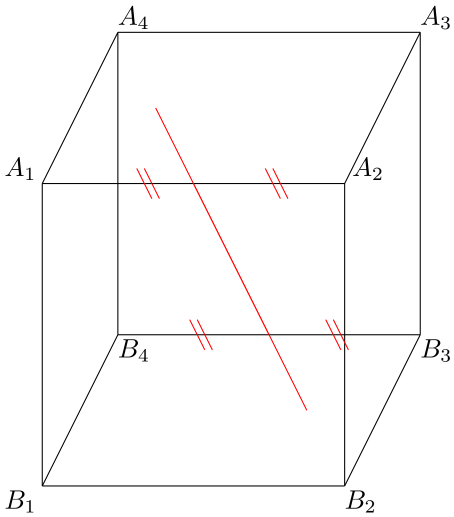
   Supposons que g laisse fixe A_1. On sait que g envoie A_2 sur A_2 ou sur B_2. Mais comme g est une isométrie on a aussi que g envoie A_2 sur A_2, A_4 ou B_1 puisque g préserve la longueur A_1A_2. Finalement g envoie A_2 sur A_2. On a de même que g fixe A_4 et B_1. Or (A_1, A_2, A_4, B_1) est un repère affine de l'espace donc g est le neutre.

   Supposons maintenant que g envoie A_1 sur B_1, alors en notant s la symétrie centrale du cube, on a que $g \circ s$ envoie A_1 sur A_1 et, d'après ce qui précède $g \circ s = \mathrm{id}$ mais g et id sont deux isométries positives et s est de déterminant -1. C'est donc absurde et ce cas est exclus.

   On déduit de ce deuxième point que $\mathrm{Iso}^+(C) \subset \mathfrak{S}_4$ (à isomorphisme près).

3. Pour obtenir l'égalité, il suffit de montrer qu'un système de générateurs de $\mathfrak{S}_4$ est réalisé par φ.

   Soit h la rotation d'angle π autour de l'axe rouge passant par les milieux des arêtes $[A_1, A_2]$ et $[B_3, B_4]$.



   Alors $h : A_1B_3 \longleftrightarrow A_2B_4$ i.e. $D_1 \longleftrightarrow D_2$ mais laisse fixe les autres grandes diagonales. Donc $\varphi(h) = (1\ 2)$.
   De même φ réalise $(2\ 3)$ et $(3\ 4)$. Or ces trois transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$. Donc φ est surjectif et ceci conclu la preuve de la proposition.

■

Application 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre de couleurs. Alors le nombres de manières différentes de colorier le cube est :

$$\frac{1}{24}\left(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2\right)$$

Démonstration. Ici il va s'agir d'utiliser une bonne action de groupe puis la formule de Burnside et enfin de compter pour trouver le résultat.

Soient Γ l'ensemble des n couleurs et Φ l'ensemble des faces du cube. Un coloriage du cube est une fonction $\Phi \to \Gamma$. On a donc l'action :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Iso}^+(C) & \times & \mathcal{F}(\Phi,\Gamma) & \to & \mathcal{F}(\Phi,\Gamma) \\ g & , & f & \mapsto & f \circ g^{-1} \end{array}$$

(on met g^{-1} parce qu'on regarde la couleur par rapport à la face de départ)
On dit que deux coloriages sont identiques s'ils sont dans la même orbite pour cette action. Trouver le nombre coloriages (différents) c'est donc trouver le nombre d'orbites. On note Ω l'ensemble des orbites.
La formule de Burnside donne :

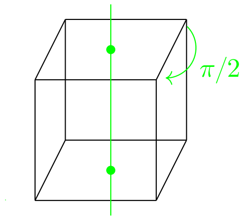
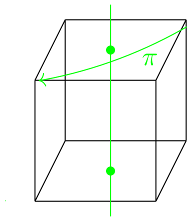
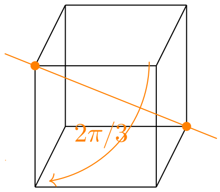
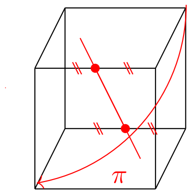
$$\#\Omega = \frac{1}{|\,\mathrm{Iso}^+(C)|} \sum_{g \in \mathrm{Iso}^+(C)} \#\mathrm{fix}(g).$$

Mais, soit $f \in \mathcal{F}(\Phi,\Gamma)$ et soit $g \in \mathrm{Iso}^+(C)$, on a :

$$f \in \mathrm{fix}(g) \iff f = f \circ g^{-1} \iff f \text{ est constante sur chaque orbite de l'action } \langle g \rangle \rightharpoondown \Phi$$

Et chacune de ces orbites peut être coloriée de n couleurs.
A g fixé, il y a donc $n^{\rho(g)}$ possibilités, où $rho(g)$ désigne le nombre d'orbite de $\langle g \rangle \rightharpoondown \Phi$. Donc $\#\mathrm{fix}(g) = n^{\rho(g)}$.

Il ne reste donc plus qu'à dresser un tableau et à compter !

$\mathrm{Iso}^+(C)$	**Nombre**	**Dessin**	**Nombre d'orbites**
id	1		6
centres et angle $\pm\pi/2$	$3+3$		3
centres et angle π	3		4
sommets et angle $\pm 2\pi/3$	$4+4$		2
arêtes et angle π	6		3

$\sum = 24$

La justification du nombre d'orbite est laissée au lecteur (elle n'est pas compliquée mais très géométrique et se voit bien avec les mains).
Au total, en regroupant toutes les données que l'on a exhibées, on retrouve la formule avancée. ■